جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین سری ششم — **عنوان تمرین** — تاریخ تحویل:

۱. توجه کنید از آنجا که ماتریس A ماتریسی rank full است، لذا A^TA وارون پذیر است.

طبق تعریف میدانیم که دو ماتریس U و V متعامد یکه هستند و داریم:

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = (V^T)^T\Sigma^T U^T = V\Sigma^T U^T$$

و لذا عبارت بالا تجزیه SVD ماتریس A^T را نشان میدهد. همچنین میدانیم که Σ^T بسیار مشابه Σ است با این تفاوت که بلوک صفر اضافی آن در سمت راست بلوک قطری است به جای آن که در پایین بلوک قطری باشد. در واقع داریم:

$$\Sigma^T\Sigma = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_m^2) \in R^{m\times m}$$

که یعنی :

$$A^TA = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V(\Sigma^T\Sigma)V^T$$

همان تجزیه SVD برای A^TA است.

حال از آن جا که $\Sigma^T\Sigma$ یک ماتریس مربعی و قطری است و همه اعضای قطر آن ناصفر هستند، لذا وارون پذیر است و داریم:

$$(\Sigma^T\Sigma)^{-1} = diag(\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \ldots, \sigma_m^{-2}) \in R^{m\times m}$$

و لذا

$$(A^TA)^{-1} = (V\Sigma^T\Sigma V^T)^{-1} = (V^T)^{-1}(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^{-1} = V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^T$$

حال توجه کنید که عبارت بالا دقیقا تجزیه SVD برای ماتریس A^TA نیست زیرا مقادیر تکین در ترتیب صعودی هستند تا نزولی. لذا برای برطرف کردن این مشکل فرض کنید P ماتریسی $m\times m$باشد که همه درایه های قطر عمود بر قطر اصلی آن یک و سایر درایه های آن ۰ باشند. داریم:

$$(A^TA)^{-1} = VPP(\Sigma^T\Sigma)^{-1}PPV^T = (VP)(P(\Sigma^T\Sigma)^{-1}P)(VP)^T$$

و توجه کنید که اکنون VP نیز متعامد یکه است زیرا هم P و هم V متعامد یکه هستند و اکنون مقادیر تکین نیز در ترتیب نزولی قرار دارند.

۲. فرض کنید $dim(V) = n$ و $v_1, \ldots, n$ پایه برای V باشند.

دو تابع T_1, T_2 را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$T_1, T_2 \in l(V)$$

$$\forall v \in V : v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$$

$$\Rightarrow T_1(v) = a_1v_1$$

$$\Rightarrow T_2(v) = a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

حال با توجه به تعریف بالا توجه کنید که: $T_1(v_2) = 0$. لذا T_1 یک‌به‌یک نیست زیرا $n > 1$ است و در نتیجه $v_2 \neq 0$. همچنین $T_2(v_2) = 0$ و لذا T_1 نیز یک‌به‌یک نیست.

اما توجه کنید که :

$$T_1(v) + T_2(v) = v$$

و لذا $T_1 + T_2 = I$ که یک‌به‌یک است و در نتیجه مجموعه توابع غیرواورون‌پذیر(غیر یک‌به‌یک)، نسبت به عمل جمع بسته نیست و لذا نمی‌تواند زیرفضایی از $l(V)$ باشد و حکم ثابت می‌شود.

۳. فرض کنید U ماتریسی است که ستون هایش $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ و V ماتریسی است که ستون هایش $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ هستند. در نتیجه شرط $\forall 1 \leqslant i \leqslant n : A\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{u_i}$ معادل عبارت $AV = U$ لذا $A = UV^{-1} = UV^T$.

همچنین A یک ماتریس متعامد یکه است زیرا

$$A^T A = (UV^T)^T UV^T = VU^T UV^T = VV^T = I$$

همچنین توجه کنید که $A = UIV^T$ تجزیه SVD برای A است به طوری که ماتریس مقادیر تکین آن $\Sigma = I$ می‌باشد.

۴. به عنوان مثال برای $f(x,y) = (x^5 + y^5)^{\frac{1}{5}}$ داریم: $f(r(x,y)) = f(rx, ry) = rf(x,y)$ اما:

$$f((x,y) + (z,w)) = f(x+z, y+w) = ((x+z)^5 + (y+w)^5)^{\frac{1}{5}}$$

$$\neq (x^5 + y^5)^{\frac{1}{5}} + (z^5 + w^5)^{\frac{1}{5}} = f(x,y) + f(z,w)$$

۵. الف) گزاره غلط است. مثال نقض پیشنهادی:

تعریف کنید:

$$T(x,y) = (-4y, x)$$

$$M(T^T T) = M(T^T), M(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1 = 1, s_2 = 4$$

از طرفی داریم:

$$M((T^2)^T T^2) = M((T^2)^T), M(T^2) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1 = 4, s_2 = 4$$

و می‌بینیم که مقادیر تکین T^2 با مربع مقادیر تکین T برابر نیست.

ب)

$$M(T) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M(T^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$M(T^T T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow s_1 = 1, s_2 = 4$$

.۶

$$||Ax-b||_2^2 = ||U\Sigma V^T x - b||_2^2$$

از آن‌جا که A ماتریسی full rank است، پس Σ نیز به همین صورت است و لذا وارون پذیر است. فرض کنید $[U, U']$ مربعی و متعامدیکه باشد. داریم:

$$||U\Sigma V^T x - b||_2^2 = || \begin{bmatrix} U^T \\ U'^T \end{bmatrix} (U\Sigma V^T x - b)||_2^2$$

$$= || \begin{bmatrix} \Sigma V^T x - U^T b \\ -U'^T b \end{bmatrix} ||_2^2 = |||\Sigma V^T x - U^T b||_2^2 + ||U'^T b||_2^2$$

و عبارت بالا با صفر کردن بخش اولش، مینیمم می‌شود و لذا حکم ثابت می‌شود.

۷. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ است که $m < n$. فرض کنید تجزیه SVD ماتریس A را با روش یکتایی (در حالتی که مقادیر تکین روی قطر نزولی هستند.) انجام داده ایم و داریم:

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{r} s_i u_i v_i^T$$

به طوری که

$$U = \begin{bmatrix} u_1, \dots, u_m \end{bmatrix}, V^T = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

و s_i ها نیز مقادیر تکین روی قطر Σ باشند به طوری که : $s_1 \geqslant \dots \geqslant s_r$

ثابت می‌شود که بهترین تقریب رتبه k برای این ماتریس برابر عبارت زیر است:

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i v_i^T$$

در واقع یعنی k جمله اول نمایش تجزیه SVD به صورت بلوکی، خواسته مسئله ما را برآورده می‌کند.